

Diplomarbeit

# Beispiele hyperelliptischer Flächen mit mindestens zwei guten Hosen

Anfertigung am  
Institut für Reine Mathematik

Vorgelegt der  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER  
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Juni 2003  
von  
Frank R. Schmidt  
aus  
Bonn

Referent: Prof. Dr. U. Hamenstädt



## Danksagung

Zuerst möchte ich Frau Hamenstädt für die motivierende Betreuung und die regelmäßigen und hilfreichen Gespräche danken, die wir geführt haben. Großer Dank gebührt auch Juan Souto für die Unterstützung bei dieser Arbeit. Für die gute Arbeitsatmosphäre und die anregenden Gespräche möchte ich der dritten Etage der Beringstrasse 6, besonders natürlich Stefan Hainz, danken und abschließend meiner Familie für die Unterstützung über meine gesamte Studienzzeit hinweg.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Hyperbolische Geometrie</b>	<b>3</b>
2.1	Hyperbolische Trigonometrie . . . . .	4
2.2	Hyperbolische Flächen . . . . .	9
2.3	Hyperelliptische Flächen . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Flächen mit 2 guten Hosen</b>	<b>19</b>
3.1	Grundkonstruktion . . . . .	19
3.2	Variation . . . . .	25



# Kapitel 1

## Einleitung

Im Folgenden ist ein Fläche  $M$  der offene Kern einer orientierbaren, kompakten, Riemannschen Fläche mit konstanter Krümmung  $-1$ . Falls  $M$  vom Geschlecht  $g$  ist und einen Rand besitzt, der aus  $n$  geschlossenen Geodätischen besteht, so bezeichnet man mit  $(g, n)$  die Signatur dieser Fläche.

Der Laplace-Operator  $\Delta$  auf Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt auf dem Abschluß  $\overline{M}$  ein diskretes, nichtnegatives Spektrum. Ist  $n > 0$ , so lassen wir beim Untersuchen des Laplace-Operators nur Funktionen zu, die die Neumannrandbedingung erfüllen. Im Zusammenhang mit dem kleinen Spektrum (Eigenwerte  $< \frac{1}{4}$ ) gehört die Riemannsche Vermutung zu einer der offenen Fragen:

**Vermutung (Riemann).** *Eine Fläche der Signatur  $(g, 0)$  hat maximal  $2g - 2$  kleine Eigenwerte.*

Nun kann man eine Fläche der Signatur  $(g, 0)$  in  $2g - 2$  Hosen (Flächen der Signatur  $(0, 3)$ ) zerlegen. Außerdem ist bekannt (siehe z.B. [Cha84]), dass eine Fläche maximal so viele kleine Eigenwerte besitzen kann wie eine gegebene Zerlegung der Fläche.

Da in [Sch90] gezeigt wurde, dass jede Hose maximal zwei kleine Eigenwerte besitzt, ergab sich  $4g - 4$  als obere Schranke für die Anzahl der kleinen Eigenwerte geschlossener Flächen. Weil Flächen außerdem immer 0 als Eigenwert besitzen, kann man Hosen somit in zwei Klassen unterteilen. Eine Hose mit keinem positiven, kleinen Eigenwert wird als *gute Hose* und eine Hose mit einem positiven, kleinen Eigenwert wird als *schlechte Hose* bezeichnet.

Können wir nun zu einer Fläche eine Hosenzerlegung finden, die genau  $s$  schlechte Hosen besitzt, so hat diese Fläche maximal

$$2 \cdot s + 1 \cdot (2g - 2 - s) = 2g - 2 + s$$

kleine Eigenwerte.

Paul Schmutz hat in [Sch96] gezeigt, dass man zu jeder geschlossenen Fläche eine Hosenzerlegung finden kann, die mindestens eine gute Hose besitzt.

Die obere Schranke von kleinen Eigenwerten kann somit auf  $4g - 5$  gesenkt werden.

Da Flächen vom Geschlecht  $g = 2$  hyperelliptisch sind, ergibt sich damit für eine Klasse von Flächen, dass sie eine Hosenzerlegung mit zwei guten Hosen besitzen. Aber auch für den Fall, dass die hyperelliptische Involution die gute Ausgangshose nicht in eine disjunkte Hose abbildet, konnte Schmutz in [Sch96] eine Zerlegung in zwei gute Hosen angeben. Er konnte also insgesamt folgende Vermutung für  $g = 2$  beweisen

**Vermutung (Schmutz).** *Eine Fläche der Signatur  $(g, 0)$  besitzt eine Zerlegung in  $2g - 2$  gute Hosen.*

In dieser Arbeit werden wir nun Beispiele hyperelliptischer Flächen vom Geschlecht 3 konstruieren, die ebenfalls eine Hosenzerlegung mit zwei guten Hosen besitzen. Hierzu geben wir in einer Klasse  $\Sigma_t$  von Flächen mit den isometrischen Involutionen  $\Phi_t$  eine gute Hose  $Y_t$  an, die disjunkt zur Hose  $\tilde{Y}_t := \Phi_t(Y_t)$  ist.

Wir senken demnach für eine Klasse von hyperelliptischen Flächen vom Geschlecht 3 die obere Schranke der kleinen Eigenwerte auf 6. Diese Klasse  $\Sigma_t$  beschreibt darüber hinaus einen eigentlichen Weg im Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_3$ .



## Kapitel 2

# Hyperbolische Geometrie

Die Hyperbolische Ebene

$$\mathbb{H}^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist zusammen mit der Metrik

$$g_{x+yi}^{\mathbb{H}}(X, Y) := \left\langle \frac{1}{y}X, \frac{1}{y}Y \right\rangle \quad \text{für } X, Y \in T_{x+yi}\mathbb{H}^2$$

eine Riemannsche Fläche  $(\mathbb{H}^2, g^{\mathbb{H}})$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  ist. Die orientierungserhaltenden Isometrien dieser Fläche werden gerade durch  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  mittels

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az + b}{cz + d}$$

beschrieben.

Um zu erkennen, was diese Fläche mit einem Hyperboloid zu tun hat, betrachten wir die Lorentzbilinearform

$$l : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

Sie wird von

$$A(\sigma) := \begin{pmatrix} \cos(\sigma) & -\sin(\sigma) & 0 \\ \sin(\sigma) & \cos(\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(\rho) := \begin{pmatrix} \cosh(\rho) & 0 & \sinh(\rho) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\rho) & 0 & \cosh(\rho) \end{pmatrix}$$

und somit auch von der hiervon erzeugten Untergruppe

$$\Omega := \langle \{A(\sigma), B(\rho) \mid \sigma \in [0; 2\pi], \rho \in \mathbb{R}_0^+\} \rangle \subset \text{GL}(3, \mathbb{R})$$

invariant gelassen.

Es sei nun

$$H := \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid l(X, X) = -1 \text{ und } x_3 > 0\}$$

und

$$g_p^H(X, Y) := l(X, Y) \quad \text{für } X, Y \in T_p H.$$

In [Bus92] wird gezeigt, dass  $g^H$  eine Riemannsche Metrik auf  $H$  ist und dass  $(H, g^H)$  isometrisch zu  $(\mathbb{H}^2, g^{\mathbb{H}})$  ist. Daher wird  $H$  auch als *Hyperboloidmodell* von  $\mathbb{H}^2$  bezeichnet.  $\Omega$  beschreibt außerdem die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien auf  $H$ .

Da diese beiden Modelle (Ebene und Hyperboloid) ihre Vor- und Nachteile besitzen, werden sie in Abhängigkeit des Problems parallel benutzt.

## 2.1 Hyperbolische Trigonometrie

In diesem Abschnitt wird das Konzept der *verallgemeinerten Dreiecke* vorgestellt, wie es in [Bus92, Abschnitt 2.1-2.2] beschrieben ist. Dort wird  $\mathbb{H}^2$  anhand des Hyperboloidmodells untersucht. Dieser Abschnitt wiederholt die Ergebnisse aus [Bus92], um im Anschluss Anwendungen für Vier- und Fünfecke herzuleiten.

**Definition 2.1.1 (Polygon).**  $M$  sei eine orientierte Riemannsche Fläche. Ein Polygon  $P \subset M$  ist eine orientierte, stückweise geodätische, geschlossene Kurve. Die Geodätischen von  $P$  heißen *Seiten* und ihre Randpunkte heißen *Ecken*.

Schneiden sich die Seiten  $c_0$  und  $c_1$  in der Ecke  $Q$ , so gibt es einen Winkel  $\alpha$  unter dem sich die Tangentialvektoren  $[c_1]_Q$  und  $-[c_0]_Q$  in  $T_Q M$  schneiden. Dieser Winkel heißt *Innenwinkel* von  $Q$  in  $P$ .

Da in  $\mathbb{H}^2$  Geodätische zwischen zwei Punkten eindeutig sind, schreiben wir für die Geodätische zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  auch  $\overline{Q_1 Q_2}$ . Besteht ein Polygon  $P \subset \mathbb{H}^2$  aus den Geodätischen  $\overline{Q_1 Q_2}, \dots, \overline{Q_{n-1} Q_n}, \overline{Q_n Q_1}$ , so schreiben wir für  $P$  auch  $(Q_1, \dots, Q_n)$ .

In dieser Arbeit verstehen wir unter einer Geodätischen immer eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , die nach der Bogenlänge parametrisiert wird. Insbesondere ergibt sich für die Länge  $\text{len}$  von Geodätischen

$$\text{len}(\gamma) = b - a.$$

Zur Vereinfachung werden wir nun die Seiten eines Polygons  $P$  mit ihren Längen identifizieren.

**Definition 2.1.2 (Winkelpaar).** Es sei ein Polygon  $P \subset \mathbb{H}^2$  gegeben und sowohl  $x$  als auch  $y$  gehören zur Menge der Winkel und Seiten von  $P$ . Wir bezeichnen  $[x, y]$  als *Winkelpaar*, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Der Winkel  $y$  folgt auf die Seite  $x$ .
- (ii) Die Seite  $y$  folgt auf den Winkel  $x$ .
- (iii) Die Seite  $y$  folgt auf die Seite  $x$  und der Innenwinkel beträgt  $\frac{\pi}{2}$ .

Je nachdem welche Bedingung das Winkelpaar erfüllt, sprechen wir vom Winkelpaar des Typs (i), (ii) bzw. (iii).

**Definition 2.1.3.** Zu einem Winkelpaar  $[x, y]$  des Polygons  $P$  wird die assoziierte Isometrie  $N_y$  wie folgt definiert:

1. Ist  $[x, y]$  vom Typ (i), so ist

$$N_y := \begin{pmatrix} -\cos(y) & -\sin(y) & 0 \\ \sin(y) & -\cos(y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ist  $[x, y]$  vom Typ (ii), so ist

$$N_y := \begin{pmatrix} \cosh(y) & 0 & \sinh(y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(y) & 0 & \cosh(y) \end{pmatrix}.$$

3. Ist  $[x, y]$  vom Typ (iii), so ist

$$N_y := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cosh(y) & 0 & \sinh(y) \\ \sinh(y) & 0 & \cosh(y) \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.1.4 (Verallgemeinertes Dreieck).** Ein Polygon  $P \subset \mathbb{H}^2$  heißt *verallgemeinertes Dreieck*, falls  $a, \gamma, b, \alpha, c, \beta$  aus der Menge der Seiten und Winkel stammt und  $[a, \gamma], [\gamma, b], [b, \alpha], [\alpha, c], [c, \beta]$  sowie  $[\beta, a]$  Winkelpaare sind.

Für  $P$  schreiben wir dann auch  $[a, \gamma, b, \alpha, c, \beta]$ .

Würden wir nur Winkelpaare vom Typ (i) und Typ (ii) betrachten, so wäre jedes verallgemeinerte Dreieck ein Dreieck. Aber gerade durch die Winkelpaare des Typs (iii), erhalten wir auch Vier-, Fünf- und Sechsecke. Dies wird uns zu einigen einfachen trigonometrischen Gleichungen führen.

Aus der Definition von verallgemeinerten Dreiecken folgt insbesondere, dass zwei Polygone  $P$  und  $Q$ , die die gleiche Darstellung  $[a, \gamma, b, \alpha, c, \beta]$  besitzen,

genau dann isometrisch sind, wenn die entsprechenden assoziierten Isometrien übereinstimmen.

Bei Dreiecken wissen wir, dass alle Längen und Winkel durch drei Anfangsdaten eindeutig bestimmt sind. Ein analoges Theorem gilt auch für verallgemeinerte Dreiecke.

**Theorem 2.1.5.** *Es sei  $[a, \gamma, b, \alpha, c, \beta]$  ein verallgemeinertes Dreieck. Dann ist:*

$$N_a N_\gamma N_b = L (N_\alpha N_c N_\beta)^T L,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix der Lorentzbilinearform  $l$  ist.

*Beweis.* Nach [Bus92, 2.2.6 Theorem] ist

$$N_a N_\gamma N_b = (N_\alpha N_c N_\beta)^{-1}.$$

Da für jede assoziierte Isometrie  $N$

$$N^{-1} = L N^T L$$

gilt, ergibt sich hieraus die Aussage.  $\square$

Wir werden nun einige trigonometrische Formeln mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecke herleiten. Bei der Angabe der verallgemeinerten Dreiecke sollen ab jetzt die griechischen Buchstaben für Winkel und die lateinischen Buchstaben für Seiten stehen.

**Korollar 2.1.6 (Dreieck).** [Bus92, 2.2.1 Theorem] *Es sei  $[a, \gamma, b, \alpha, c, \beta]$  ein verallgemeinertes Dreieck (Abbildung 2.1). Dann gelten folgende Kosinussätze:*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma) \quad (2.1)$$

$$-\cos(\gamma) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(c) \quad (2.2)$$

**Korollar 2.1.7 (Viereck).** *Für das verallgemeinerte Dreieck  $[x, g, y, \beta, L, \alpha]$  (Abbildung 2.2) gilt:*

$$\cosh(L) = \frac{\cosh(g) + \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} + 1 \quad (2.3)$$

$$\sinh(y) = \cosh(L) \sinh(x) - \sinh(L) \cosh(x) \cos(\alpha) \quad (2.4)$$

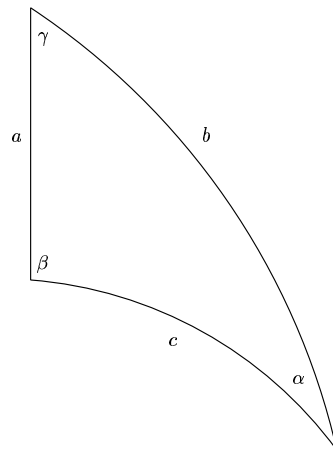


Abbildung 2.1: Das verallgemeinerte Dreieck  $[a, \gamma, b, \alpha, c, \beta]$  ist ein Dreieck.

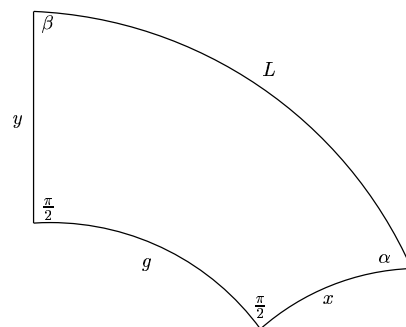


Abbildung 2.2: Das verallgemeinerte Dreieck  $[x, g, y, \beta, L, \alpha]$  ist ein Viereck.

**Bemerkung.** Aus (2.3) folgt außerdem mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\cosh(g) = \cosh(L) \sin(\beta) \quad (2.5)$$

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass:

$$\begin{aligned} A &:= N_x N_g N_y \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(x) & 0 & \sinh(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(x) & 0 & \cosh(x) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} -\cosh(y) & 0 & -\sinh(y) \\ \sinh(g) \sinh(y) & -\cosh(g) & \sinh(g) \cosh(y) \\ \cosh(g) \sinh(y) & -\sinh(g) & \cosh(g) \cosh(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B &:= N_\beta N_L N_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \cosh(L) & -\sin(\alpha) \cosh(L) & \sinh(L) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) \sinh(L) & -\sin(\alpha) \sinh(L) & \cosh(L) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen Theorem 2.1.5 ist  $a_{22} = b_{22}$  und somit

$$\begin{aligned} -\cosh(g) &= -\sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(L) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \cosh(g) &= (\cosh(L) - 1) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

was (2.3) beweist. Analog wird (2.4) gezeigt, indem man das verallgemeinerte Dreieck zu

$$[L, \alpha, x, g, y, \beta]$$

umnotiert. Theorem 2.1.5 die Gleichung dann wegen

$$(N_L N_\alpha N_x)_{31} = -(N_g N_y N_\beta)_{13}.$$

□

**Korollar 2.1.8 (Fünfeck).** Das verallgemeinerte Dreieck  $[x, L, y, \alpha, h, g]$  (Abbildung 2.3) erfüllt:

$$\cosh(L) = \sin(\alpha) \sinh(h) \sinh(g) - \cos(\alpha) \cosh(g) \quad (2.6)$$

*Beweis.* Theorem 2.1.5 liefert diese Gleichung, da

$$(N_x N_L N_y)_{12} = (N_\alpha N_h N_g)_{21}.$$

□

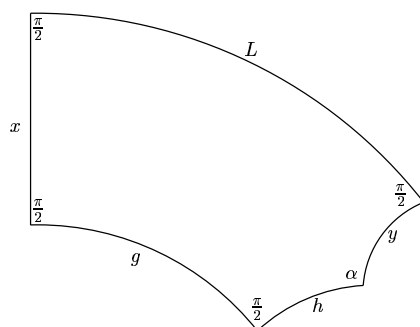


Abbildung 2.3: Das verallgemeinerte Dreieck  $[x, L, y, \alpha, h, g]$  ist ein Viereck.

## 2.2 Hyperbolische Flächen

Im Folgenden werden wir zwei Arten von hyperbolischen Flächen definieren, die im Verlauf dieser Arbeit eine zentrale Bedeutung spielen werden. Zum Einen werden wir uns mit topologischen Kreisscheiben beschäftigen, deren Rand ein Polygon ist. Diese Flächen werden wir als *volle Polygone* bezeichnen.

Zum Anderen werden wir uns mit Flächen beschäftigen, deren Rand aus geschlossenen Geodätischen besteht. Diese Flächen werden wir als *Flächen* schlechthin bezeichnen. Nachdem wir den Zusammenhang zwischen geschlossenen Kurven und geschlossenen Geodätischen sowie einige Eigenschaften des Laplace-Operators auf Flächen zitiert haben, wird im Anschluss die Charakterisierung von guten und schlechten Hosen, wie sie in [Sch96] beschrieben wird, vorgestellt.

**Definition 2.2.1 (Flächen und volle Polygone).** Es sei  $\overline{M}$  eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  mit konstanter Krümmung  $-1$ .

- Ist  $g = 0$  und  $\partial M$  ein Polygon, so heißt  $M$  *volles Polygon*. Die Ecken, Seiten und Winkel von  $\partial M$  werden auch als Ecken, Seiten bzw. Winkel von  $M$  bezeichnet.
- Besteht der Rand aus  $n \in \mathbb{N}_0$  geschlossenen Geodätischen, so heißt  $M$  *Fläche* und  $(g, n)$  die *Signatur* von  $M$ .

**Bemerkung.** Wir werden Flächen und volle Polygone immer als *offene* Mannigfaltigkeiten verstehen, d.h. sie sind disjunkt zu ihrem Rand. Insbesondere gilt für den Abschluss  $\overline{M}$  also immer:

$$\overline{M} = M \sqcup \partial M.$$

Die beiden folgenden Theoreme werden im nächsten Kapitel benötigt. Es handelt sich dabei um Eigenschaften von geschlossenen Kurven und den hierzu frei homotopen Geodätischen.

**Theorem 2.2.2.** [Bus92, Theorem 1.6.6] *M sei Fläche und  $c \subset M$  sei eine geschlossene Kurve, die nicht nullhomotop ist. Dann gilt*

1.  *$c$  ist frei homotop zu einer eindeutigen Geodätischen  $\gamma$ .*
2. *Das Bild  $\text{Im } \gamma$  ist entweder disjunkt zum Rand oder identisch mit einer Randkomponente von  $M$ .*
3. *Ist  $c$  einfach geschlossen, so ist auch  $\gamma$  einfach geschlossen.*

**Theorem 2.2.3.** [Bus92, Theorem 1.6.7] *Es seien  $c_1$  und  $c_2$  geschlossene, nicht nullhomotope Kurven in der Fläche  $M$ , die sich in  $n \in \mathbb{N}_0$  Punkten schneiden. Weiter seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die zu  $c_1$  bzw.  $c_2$  frei homotopen Geodätischen aus Theorem 2.2.2.*

*Falls  $\text{Im } \gamma_1 \neq \text{Im } \gamma_2$ , so schneiden sich  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in maximal  $n$  Punkten.*

**Definition 2.2.4 (Laplace-Operator).** 1. Es sei  $M$  eine Fläche. Die Eigenwerte des Laplace-Operators

$$\Delta := - * d * d$$

auf  $\overline{M}$  werden aufsteigend nummeriert. Also

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$

wobei die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit wiederholt werden. Wenn  $M$  einen nichttrivialen Rand besitzt, so werden nur die Eigenwerte bzgl. Neumannrandbedingungen

$$\forall p \in \partial M : \text{grad } f(p) \in T_p \partial M$$

betrachtet.

2. Ein *kleiner Eigenwert* ist ein Eigenwert aus  $[0, \frac{1}{4}[$ . Die korrespondierenden Eigenfunktionen heißen *kleine Eigenfunktionen*.

Für die Betrachtung von geschlossenen Flächen spielt die Wahl der Nebenbedingungen auf dem Rand offensichtlich keine Rolle.

Wenn wir aber zu dieser Fläche eine Zerlegung in *Flächen mit Rand* wählen, dann können wir die Anzahl der kleinen Eigenwerte der Ausgangsfläche nach oben abschätzen, wenn wir in der Zerlegung gerade die Eigenwerte bzgl. Neumannrandbedingungen betrachten.



**Definition 2.2.5 (Zerlegung).**  $M$  sei eine Fläche. Eine Familie  $\{M_i\}_{i=1,\dots,k}$  von paarweisen disjunkten Flächen heißt *Zerlegung* von  $M$ , falls:

$$\overline{M} = \bigcup_{i=1}^k \overline{M}_i$$

**Theorem 2.2.6.** [Cha84, Abschnitt I.5] *Es seien eine Fläche  $M$  mit  $\nu$  kleinen Eigenwerten und einer Zerlegung  $\{M_i\}_{i=1,\dots,k}$  gegeben. Weiter habe  $M_i$  genau  $\nu_i$  kleine Eigenwerte. Dann gilt:*

$$\nu \leq \sum_{i=1}^k \nu_i$$

**Definition 2.2.7.** • Eine Fläche  $Y$  der Signatur  $(0, 3)$  heißt *Hose*. Zu jeder Hose  $Y$  gibt es zwei disjunkte, isometrische, rechtwinklige, volle Sechsecke

$$S^+, S^- \subset Y$$

mit den aufeinander folgenden Seitenlängen  $x, c, y, a, z, b$ , so dass

$$\overline{Y} = \overline{S^+} \cup \overline{S^-}.$$

Wenn man die Randgeodätischen  $\gamma_i$  der Hose so nummeriert, dass  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$ , dann kann man die Sechsecke so wählen, dass:

$$x = \frac{\gamma_1}{2} \qquad y = \frac{\gamma_2}{2} \qquad z = \frac{\gamma_3}{2}$$

Sechsecke mit diesen Eigenschaften heißen *bzgl.  $Y$  geodätisch sortiert*.

- Es sei  $\Psi_Y : \overline{Y} \rightarrow \overline{Y}$  die kanonische Involution, die ein Sechseck in das andere überführt.

Wir werden uns nun mit Hosenzerlegungen von Flächen beschäftigen um die Anzahl der kleinen Eigenwerte abschätzen zu können. Tatsächlich kann man nämlich zu jeder Fläche der Signatur  $(g, n)$  eine Zerlegung in Hosen finden.

**Theorem 2.2.8 (Hosenzerlegung).** *Sei  $M$  eine Fläche der Signatur  $(g, n)$ . Dann ist  $2(g-1) + n > 0$  und es gibt eine Zerlegung  $\{Y_1, \dots, Y_{2(g-1)+n}\}$  von  $M$  in  $2(g-1) + n$  Hosen.*

*Beweis.* In [Bus92, Abschnitt 3.6] wird der Fall für  $n = 0$  mit Hilfe von trivalenten Graphen bewiesen. Ist  $n > 0$ , so kann man  $M$  zu  $\widetilde{M}$  erweitern, indem man entartete Hose  $Q_i$  (Flächen der Signatur  $(1, 1)$ ) an die Randkomponenten von  $M$  anklebt. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

Da also jede Fläche eine Hosenzerlegung besitzt, ist es von hohem Interesse, die Eigenwerte von Hosen bzgl. Neumannrandbedingungen bestimmen zu können.

**Theorem 2.2.9.** [Sch96, Theorem 6] *Eine Hose  $Y$  hat maximal zwei kleine Eigenwerte. Wenn  $f$  eine kleine Eigenfunktion von  $M$  ist, dann gilt entweder  $\Psi_Y(f) = f$  oder  $\Psi_Y(f) = -f$ .*

Insgesamt kann man also Hosen in drei Klassen einteilen.

**Definition 2.2.10.** • Eine Hose mit keinem positiven kleinen Eigenwert heißt *gut*.

- Eine Hose mit einem positiven kleinen Eigenwert heißt *schlecht*.
- Sei  $Y$  eine schlechte Hose und  $f$  eine kleine Eigenfunktion bzgl.  $\lambda_1$ .
  - $Y$  heißt vom Typ (S) (für symmetrisch), wenn  $\Psi_Y(f) = f$ .
  - $Y$  heißt vom Typ (A) (für antisymmetrisch), wenn  $\Psi_Y(f) = -f$ .

**Theorem 2.2.11 (schlechte Hosen).** [Sch96, Theorem 7 und 8] *Es sei  $Y$  eine schlechte Hose und  $x, c, y, a, z, b$  die Seitenlängen der geodätisch sortierten Sechsecke.*

1. Ist  $Y$  vom Typ (S), so gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(c) > 9 & & \cosh(z) > 9 \\ \sinh(z) > 3.7 \sinh(x + y) & & \end{aligned}$$

2. Ist  $Y$  vom Typ (A), so gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(c) < \frac{3}{2} & & \cosh(z) > 9 \\ \sinh(z) < 0.28 \sinh(x + y) & & \end{aligned}$$

Aus dem Quotienten  $\frac{\sinh(z)}{\sinh(x+y)}$  ergibt sich demnach sofort, ob eine schlechte Hose vom Typ (A) oder vom Typ (S) ist (Abbildung 2.4). Dies führt zu folgender Definition:

**Definition 2.2.12.** Zu  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  definiere

$$Q(x, y, z) := \frac{\sinh(z)}{\sinh(x + y)}.$$

Sind  $Y$  eine Hose und  $x, c, y, a, z, b$  die aufeinanderfolgenden Seitenlängen eines bzgl.  $Y$  geodätisch sortierten Sechsecks, so definiere

$$Q(Y) := Q(x, y, z).$$

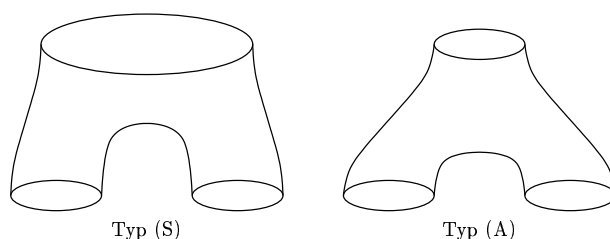


Abbildung 2.4: Die längste Randgeodätische ist bei Typ (S)-Hosen verhältnismäßig groß und bei Typ (A)-Hosen verhältnismäßig klein.

Insgesamt ergibt sich dann

**Korollar 2.2.13.** *Eine Hose  $Y$  ist gut, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1.  $Q(Y) \in [0,28; 3,7]$
2. Für die Länge  $z$  jeder Randgeodätischen  $\gamma$  gilt :

$$\cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq 9$$

3. Ist  $c$  der Abstand der beiden kleinsten Randgeodätischen, dann ist

$$\cosh(c) \in [1,5; 9]$$

Nachdem wir nun Kriterien angegeben haben, mit Hilfe derer wir gute Hosen erkennen können, werden wir im nächsten Kapitel solche Hosen in einer Klasse von hyperelliptischen Flächen suchen. Hierzu werden wir Geodätische im Fundamentalbereich betrachten und deren Längen bestimmen. Zuvor werden wir aber im nächsten Abschnitt die Fundamentalbereiche hyperelliptischer Flächen genauer beschreiben.

## 2.3 Hyperelliptische Flächen

In diesem Abschnitt werden wir hyperelliptische Flächen einführen und deren Fundamentalbereich genauer betrachten. In [SS99] wurde eine Charakterisierung der Fundamentalbereiche von Flächen angegeben, um damit den Teichmüllerraum zu beschreiben. Als eine Anwendung wurde dort außerdem eine äquivalente Beschreibungen von hyperelliptischen Flächen gezeigt, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit nutzen werden. Die wichtigsten Schritte dafür werden nun präsentiert.

**Definition 2.3.1 (kanonisches Polygon).** Sei  $g \in \mathbb{N}$  und  $P(g)$  ein volles Polygon mit den  $4g$  Seiten  $a_1, \dots, a_{4g}$  und den Winkeln  $\alpha_i$  zwischen den Seiten  $a_i$  und  $a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, 4g$ . Hierbei sind die Indizes modulo  $4g$  zu verstehen.

$P(g)$  heisst kanonisch, falls folgendes gilt:

$$a_i = a_{i+2g} \quad , \quad i = 1, \dots, 2g \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{4g} \alpha_i = 2\pi \quad (2.8)$$

$$0 < \alpha_i < \pi \quad , \quad i = 1, \dots, 4g$$

$$\alpha_1 = \alpha_{2g+1}$$

$$\sum_{i=1}^g \alpha_{2i-1} + \sum_{i=g+1}^{2g} \alpha_{2i} = \sum_{i=1}^g \alpha_{2i} + \sum_{i=g+1}^{2g} \alpha_{2i-1}$$

Zu  $g \in \mathbb{N}$  werde der Raum der kanonischen Polygone in  $\mathbb{H}^2$  mit  $\mathcal{P}(g)$  bezeichnet. Hierauf definieren wir wie folgt eine Topologie:

Es sei  $(P_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(g)$  eine Folge und  $P \in \mathcal{P}(g)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} P_j \rightarrow P &: \Leftrightarrow \\ a_i(P_j) &\rightarrow a_i(P) \quad i = 1, \dots, 4g \text{ und} \\ \alpha_i(P_j) &\rightarrow \alpha_i(P) \quad i = 1, \dots, 4g \end{aligned}$$

**Theorem 2.3.2 (Poincaré).** [SS99, THEOREM 5] Zu jedem kanonischen Polygon  $P \in \mathcal{P}(g)$  gibt es eine Gruppe  $\Gamma \subset \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ , so dass folgendes gilt:

- $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  ist Fläche der Signatur  $(g, 0)$ .
- $P(g)$  ist Fundamentalbereich von  $\Gamma$ .

Die Gruppe  $\gamma$  wird außerdem von den  $2g$  Elementen  $e_i$  erzeugt, wobei

$$\begin{aligned} e_i(a_i) &= a_{i+2g} && \text{für ungerades } i \\ e_i^{-1}(a_i) &= a_{i+2g} && \text{für gerades } i \end{aligned}$$

Wie am Anfang dieses Kapitels beschrieben, operieren die Elemente aus  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  als Isometrien auf  $\mathbb{H}^2$ . Allerdings ist nicht zu jeder Untergruppe  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  die Menge  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  eine Fläche. Vielmehr können nur die so genannten *Fuchsschen Gruppen* diese Eigenschaft erfüllen. Eine gute Beschreibung dieser Gruppen erhält man in [Kat92].

**Definition 2.3.3.** Nach Theorem 2.3.2 existiert zu jedem kanonischen Polygon aus  $\mathcal{P}(g)$  eine Fläche der Signatur  $(g, 0)$ . Der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}$  ist der Raum dieser Flächen mit der Topologie, die von  $\mathcal{P}(g)$  induziert wird.

Normalerweise werden die  $2g$  Elemente  $e_i$  der Gruppe  $\Gamma$  so gewählt, dass

$$\prod_{i=1}^{2g} [e_{2i-1}, e_{2i}] = \text{id}$$

erfüllt ist, wobei  $[\cdot, \cdot]$  den Kommutator

$$[e_{2i-1}, e_{2i}] := e_{2i-1} e_{2i} e_{2i-1}^{-1} e_{2i}^{-1}$$

beschreibt.

Durch die Wahl der  $e_i$ , die wir hier getroffen haben, wird aber die Bedingung

$$e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_{2g} \cdot e_1^{-1} \cdot e_2^{-1} \cdot \dots \cdot e_{2g}^{-1} = \text{id}$$

erfüllt.

Die Vorteile, die diese Wahl hat, wird ausführlich in [SS99] vorgestellt. Die Tatsache, dass gegenüberliegende Seiten identifiziert werden, spielt dabei eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung hyperelliptischer Flächen.

**Definition 2.3.4 (Hyperelliptische Fläche).** Eine Fläche  $M$  der Signatur  $(g, 0)$  heißt hyperelliptisch, wenn eine Isometrie  $\Phi : M \rightarrow M$  existiert, so dass:

- $\Phi^2 = \text{id}$
- $\Phi$  besitzt genau  $2g + 2$  Fixpunkte

Die Fixpunkte  $w_0, \dots, w_{2g+1} \in M$  heißen *Weierstraßpunkte*.

**Definition 2.3.5 (Hyperelliptisches Polygon).** Sei  $g \in \mathbb{N}$  und  $P$  ein kanonisches Polygon mit den Seiten  $a_i$  und den Winkeln  $\alpha_i$ .  $P$  heißt *hyperelliptisch*, falls:

$$\alpha_i = \alpha_{2g+i}, \quad i = 1, \dots, 2g \quad (2.9)$$

Eine hyperelliptisches Polygon ist nicht als Spezialfall einer hyperelliptischen Fläche zu verstehen. Vielmehr beschreibt ein hyperelliptisches Polygon gerade den Fundamentalbereich einer hyperelliptischen Fläche.

**Theorem 2.3.6.** [SS99, THEOREM 14] Sei  $M$  eine Fläche der Signatur  $(g, 0)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $M$  ist hyperelliptisch.

2.  $M$  besitzt mindestens  $2g - 2$  einfach geschlossene Geodätische durch einen Punkt  $Q$ , so dass sich die Kurven paarweise genau in  $Q$  schneiden.
3. Der Fundamentalbereich von  $M$  ist ein hyperelliptisches Polygon  $F(M)$ .

**Korollar 2.3.7.**  $M$  sei eine hyperelliptische Fläche vom Geschlecht  $g$  und  $\Phi$  die dazugehörige Isometrie. Weiter seien  $w_i$  die Weierstraßpunkte bzgl.  $\Phi$ .

1. Dann gibt es geschlossene Geodätische  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  mit:
  - (a)  $\gamma_i$  ist geschlossene Geodätische zwischen  $w_0$  und  $w_i$ .
  - (b)  $M \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} \gamma_i$  ist ein hyperelliptisches Polygon  $P(M)$
2. Es gibt eine kanonische Isometrie  $\hat{\Phi}$  auf  $M$ , die auf  $P(M)$  als  $\pi$ -Rotation operiert und die gleichen Weierstraßpunkte wie  $\Phi$  besitzt.

*Beweis.* 1. Der Beweis  $1 \Rightarrow 2$  in [SS99, THEOREM 14] zeigt, dass man Geodätische  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g-2}$  wählen kann, die (1a) erfüllen. [SS99, LEMMA 13] besagt, dass man  $\gamma_{2g-1}$  und  $\gamma_{2g}$  so wählen kann, dass insgesamt (1b) gilt. Der Beweis von [SS99, LEMMA 13] zeigt darüber hinaus, dass man  $\gamma_{2g-1}$  und  $\gamma_{2g}$  so wählen kann, dass (1a) auch für  $\gamma_{2g-1}$  und  $\gamma_{2g}$  gilt.

2. Die Beweiskette

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$$

in [SS99, THEOREM 14] konstruiert die gesuchte Isometrie  $\hat{\Phi}$ . □

Die hyperelliptischen Polygone, von denen in Theorem 2.3.6 und in Korollar 2.3.7 die Rede ist, liegen in unterschiedlichen Räumen.

$P(M)$  liegt in  $M$  und ist gerade  $M \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{2g})$ . Insbesondere sind die Ecken dieses Polygons identisch.

$F(M)$  ist dagegen als Fundamentalbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{H}^2$  und die Ecken und Seiten sind paarweise verschieden. Durch die  $\pi$ -Rotation wird in  $F(M)$  der Mittelpunkt in sich überführt, d.h. er repräsentiert gerade den Weierstraßpunkt  $w_{2g+1}$ , der durch die Geodätischen aus Korollar 2.3.7 nicht erreicht wird.

Die ausgezeichneten Punkte einer hyperelliptischen Fläche (Weierstraßpunkte) bestimmen also die ausgezeichneten Elemente des hyperelliptischen Polygons (Zentrum und Kanten).

Man beachte, dass diese Korrespondenz nur durch die spezielle Wahl des Fundamentalbereichs möglich war. Hätten wir nicht die gegenüberliegenden Seiten identifiziert, gäbe es keinen Grund dafür, dass die  $\pi$ -Rotation eine im Fundamentalbereich abgeschlossene Operation beschreibt. Die so erhaltende

Korrespondenz wird nun im folgenden Kapitel benutzt um eine hyperelliptische Fläche mit zwei guten Hosen zu konstruieren.





# Kapitel 3

## Flächen mit 2 guten Hosen

### 3.1 Grundkonstruktion

In diesem Abschnitt werden wir zuerst zeigen, dass es eine hyperelliptische Fläche vom Geschlecht 3 gibt, deren Fundamentalbereich ein volles regelmäßiges Zwölfeck mit gleichen Innenwinkeln  $\frac{\pi}{6}$  ist.

Im Anschluss werden wir in diesem Fundamentalbereich die Randgeodätischen einer Hose angeben und zeigen, dass sie die Bedingungen für gute Hosen erfüllen. Außerdem werden wir sehen, dass man mit Hilfe der kanonischen Involution ( $\pi$ -Rotation im Fundamentalbereich) eine Hose erhält, die zur ersten disjunkt ist.

**Bemerkung.** Indizes sind immer modulo 12 zu verstehen. Außerdem werden wir Geodätische mit ihren Längen identifizieren.

Es sei  $Z \in \mathbb{H}^2$ . Betrachte nun Geodätische  $\eta_1, \dots, \eta_{12}$ , mit Anfangspunkt  $Z$ , so dass  $\eta_i$  und  $\eta_{i+1}$  den Winkel  $\frac{\pi}{6}$  einschließen. Weiter seien für  $i = 1, \dots, 12$ :

$$Q_i := \eta_i \left( \cosh^{-1} \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) \right)$$

Damit sind die Dreiecke  $(Q_i, Z, Q_{i+1})$  eindeutig definiert.

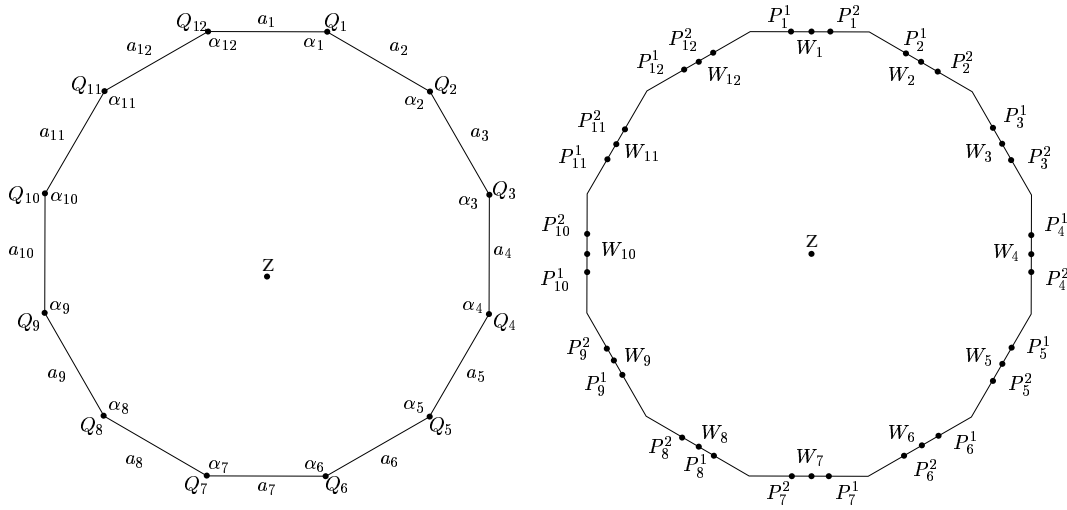
Es lässt sich nachrechnen, dass die Winkel bei  $Q_i$  und  $Q_{i+1}$  genau  $\frac{\pi}{12}$  betragen und die Basis der Dreiecke die Länge  $2h$  besitzt, wobei

$$h = \cosh^{-1}(2 + \sqrt{3}) \approx 1,99$$

die Höhe dieser gleichschenkligen Dreiecke ist.

Dies führt nun zu folgenden Bezeichnungen:

**Definition 3.1.1.** Es sei  $F_0$  ein hyperelliptische Zwölfeck (Abbildung 3.1) mit

Abbildung 3.1: Fundamentalebene von  $\Sigma_0$  in  $\mathbb{H}^2$ 

- den im Uhrzeigersinn angeordneten Ecken  $Q_1, \dots, Q_{12}$ ,
- den Seiten  $a_i$  zwischen  $Q_{i-1}$  und  $Q_i$ , die durch die Punkte  $P_i^1, P_i^2$  gedrittelt und durch die Punkte  $W_i$  halbiert werden
- und den Innenwinkeln  $\alpha_i$  bei  $Q_i$  zwischen den Seiten  $a_i$  und  $a_{i+1}$ ,

so dass für  $i = 1, \dots, 12$  folgendes gilt:

$$\alpha_i = \frac{\pi}{6} \qquad \frac{a_i}{2} = \cosh^{-1}(2 + \sqrt{3})$$

Die nach Theorem 2.3.2 zu  $F_0$  korrespondierende Fläche sei

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2 \qquad \Gamma_0 \subset \text{PSL}(2, \mathbb{Z}).$$

Weiter seien  $p_0 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Sigma_0$  die kanonische Projektion und  $\Phi_0$  die isometrische Involution, die durch die  $\pi$ -Rotation in  $F_0$  auf  $\Sigma_0$  induziert wird. Dann können wir die Weierstraßpunkte  $w_0, \dots, w_7$  von  $\Sigma_0$  bzgl.  $\Phi_0$  so nummerieren, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} p_0(Q_i) &= w_0 && \text{für } i = 1, \dots, 12 \\ p_0(W_i) &= p_0(W_{i+6}) = w_i && \text{für } i = 1, \dots, 6 \\ p_0(Z) &= w_7 \end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir

$$p_0(P_i^1) = p_0(P_{i+6}^2) \qquad \text{für } i = 1, \dots, 12$$

In der Fläche  $\Sigma_0$  werden wir nun eine Hose konstruieren. Hierzu definieren wir Kurven in  $\overline{F_0}$ , die dann nach  $\Sigma_0$  projiziert werden:

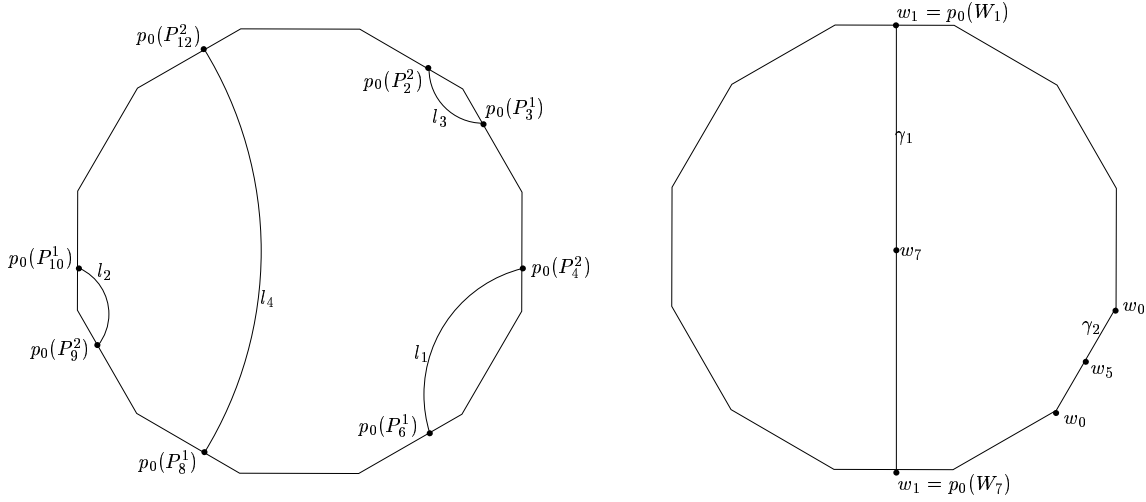


Abbildung 3.2: Verlaufe von  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und des zu  $\gamma_3$  frei homotopen Vierecks in der aufgeschnittenen Fläche.

**Definition 3.1.2.** Es seien in  $\Sigma_0$  folgende geschlossene Geodätische definiert:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= p_0(\overline{W_7 W_1}) \\ \gamma_2 &:= p_0(\overline{Q_5 Q_4}) \end{aligned}$$

Darüber hinaus wird durch

$$\begin{aligned} l_1 &:= p_0(\overline{P_6^1 P_4^2}) \\ l_2 &:= p_0(\overline{P_{10}^1 P_9^2}) \\ l_3 &:= p_0(\overline{P_3^1 P_2^2}) \\ l_4 &:= p_0(\overline{P_8^1 P_{12}^2}) \end{aligned}$$

in  $\Sigma_0$  ein Viereck  $l_1 \circ l_2 \circ l_3 \circ l_4$  konstruiert (Abbildung 3.2), das nach Theorem 2.2.2 frei homotop zu einer eindeutigen, geschlossenen Geodätischen  $\gamma_3$  ist.

**Bemerkung.** Für zwei Kurven  $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow M$  und  $c_2 : [a_2, b_2] \rightarrow M$  mit  $c_1(b_1) = c_2(a_2)$  sei dabei:

$$\begin{aligned} c_1 \circ c_2 &: [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow M \\ t &\mapsto \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t - (b_1 - a_2)) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

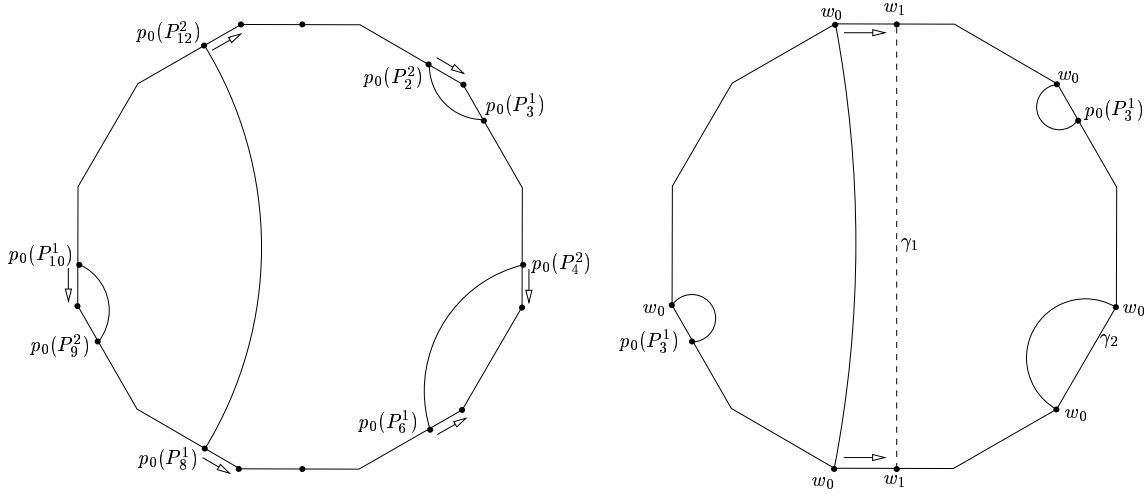


Abbildung 3.3: Freie Homotopien in der aufgeschnittenen Fläche

Die Homotopie, die  $l_1 \circ l_2 \circ l_3 \circ l_4$  nach  $\gamma_3$  homotopiert, werde mit  $H$  bezeichnet. Schneiden wir nun  $\Sigma_0$  entlang einer Kante  $p_0(a_i)$  des Polygons  $P(\Sigma_0)$  auf, so induziert  $H$  auf  $\Sigma_0 \setminus p_0(a_i)$  eine freie Homotopie  $H_i$  von Kurven, die nicht geschlossen sind.

Da  $H$  nun die eindeutige Fortsetzung von  $H_i$  auf dem Abschluss

$$\overline{\Sigma_0 \setminus p_0(a_i)} = \Sigma_0$$

ist, beschreibt  $H_i$  eine freie Homotopie von Kurven mit Anfangs- und Endpunkt auf  $p_0(a_i)$ . Insgesamt erhalten wir:

**Lemma 3.1.3.** *Für  $i = 1, \dots, 6$  seien  $e_i \in \Gamma_0$  mit  $e_i(a_i) = a_{i+6}$ . Dann gibt es für  $i = 2, 3, 4, 6$  Punkte  $S_i \in a_i \subset \mathbb{H}^2$ , so dass:*

$$\gamma_3 = p_0(\overline{S_6 S_4}) \circ p_0(\overline{e_4(S_4) e_3(S_3)}) \circ p_0(\overline{S_3 S_2}) \circ p_0(\overline{e_2(S_2) e_6(S_6)})$$

Es muss nun gezeigt werden, dass  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  eine gute Hose  $Y_0 \subset \Sigma_0$  beranden. Dies wird der Inhalt der nächsten beiden Lemmata sein. Als Erstes müssen wir zeigen, dass die drei Geodätischen tatsächlich eine Hose beranden.

**Lemma 3.1.4.** *Die Geodätischen  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  sind paarweise disjunkt und beranden eine Hose  $Y_0$ .*

*Beweis.* Im Verlauf dieses Beweises werde die Homologieklassse einer geschlossenen Kurve  $c$  mit  $[c]_H$  bezeichnet. Mit Abbildung 3.3 erhält man somit

$$\begin{aligned}
[\gamma_3]_H &= [l_1]_H + [l_2]_H + [l_3]_H + [l_4]_H \\
&= [\gamma_2]_H + [p_0(\overline{Q_7 Q_{12}})]_H \\
&= [\gamma_2]_H + [\gamma_1]_H.
\end{aligned}$$

Da jede der drei Geodätischen nicht trennend ist (siehe hierzu Abbildung 3.2), sind die Geodätischen nicht nullhomolog. Damit ist  $\gamma_3$  weder zu  $\gamma_2$  noch zu  $\gamma_1$  frei homotop. Wegen Theorem 2.2.3 sind die drei Geodätischen somit paarweise disjunkt.

Wegen

$$[\gamma_1]_H + [\gamma_2]_H - [\gamma_3]_H = 0$$

gibt es eine Fläche  $N \subset \Sigma_0$  mit  $\partial N = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \gamma_3$ .

Mit Abbildung 3.2 erkennt man, dass  $N$  zusammenhängend ist.  $N$  habe also die Signatur  $(g, 3)$ . Dann besteht  $N$  aus  $2(g-1) + 3 \leq 3$  Hosen und somit ist  $g \leq 1$ . Ist  $g = 0$ , so gilt das Lemma mit  $Y_0 := N$ . Sei also  $g = 1$ . Dann besteht  $N$  aus 3 Hosen und  $Y_0 := \Sigma_0 \setminus \overline{N}$  ist die gesuchte Hose.  $\square$

**Lemma 3.1.5.**  $Y_0$  ist gut.

*Beweis.* Es seien  $x, c, y, a, z, b$  die Seitenlängen eines der Sechsecke  $S$  aus denen  $Y_0$  besteht, so dass

$$x = \frac{\gamma_1}{2} \qquad y = \frac{\gamma_2}{2} \qquad z = \frac{\gamma_3}{2}$$

Da nach Konstruktion  $x = y = h$ , reicht es zu zeigen, dass

$$Q(x, y, z) \in [0, 28, 3, 7]$$

um zu verifizieren, dass  $Y_0$  gut ist.

Es wäre dann nämlich

$$z \geq \sinh^{-1}(0,28 \sinh(2h)) > h = y = x$$

und  $S$  somit ein bzgl.  $Y_0$  geodätisch sortiertes Sechseck.

Nun ist aber

$$z \leq \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{2}$$

und wir erhalten mit (2.4) bzw. (2.1)

$$\sinh\left(\frac{l_1}{2}\right) = \cosh\left(\frac{2}{3}h\right) \sinh(h) - \sinh\left(\frac{2}{3}h\right) \cosh(h) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{mit (2.4)}$$

$$l_1 \approx 2,48$$

$$\cosh(l_2) = \cosh\left(\frac{2h}{3}\right)^2 - \sinh\left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{mit (2.1)}$$

$$l_2 = l_3 \approx 0,879$$

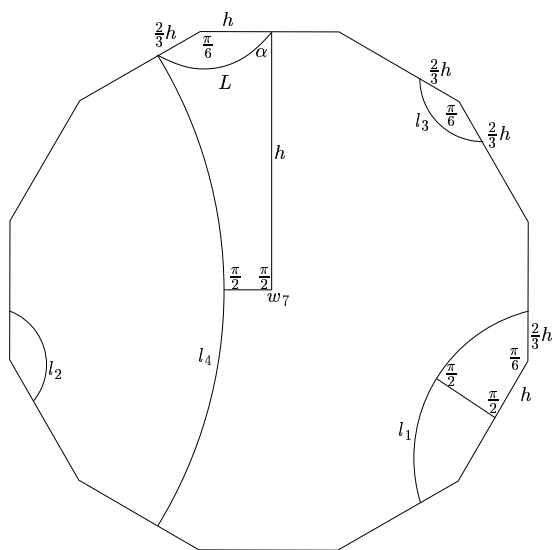


Abbildung 3.4: Polygone in der aufgeschnittenen Fläche

Wendet man (2.1) auf das Dreieck  $(P_{12}^2, Q_{12}, W_1)$  an, so erhält man für  $L := \overline{P_{12}^2 W_1}$

$$\cosh(L) = \cosh(h) \cosh\left(\frac{2}{3}h\right) - \sinh(h) \sinh\left(\frac{2}{3}h\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$L \approx 1,35.$$

Weiter beträgt in  $(Z, W_1, P_{12}^2)$  der Winkel  $\alpha$  bei  $W_1$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\sinh\left(\frac{2}{3}h\right)}{\sinh(L)}\right) \approx 1,06$$

Da außerdem die Seite  $\overline{ZW_1}$  die Länge  $x = h \approx 1,99$  besitzt, erhalten wir mit (2.4)

$$\sinh\left(\frac{l_4}{2}\right) = \cosh(L) \sinh(x) - \sinh(L) \cosh(x) \cos(\alpha)$$

$$l_4 \approx 4,27$$

und damit:

$$Q(x, y, z) \leq \frac{\sinh\left(\frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{2}\right)}{\sinh(2h)} < 1,32 < 3,7$$

Bezeichnen wir nun in  $F_0$  mit

- $s_1$  die Kürzeste zwischen  $a_8$  und  $a_{12}$  und mit
- $s_2$  die Kürzeste zwischen  $a_4$  und  $a_6$

dann ist mit (2.6) bzw. (2.5)

$$\cosh\left(\frac{s_1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sinh(h)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cosh(h) \quad \text{mit (2.6)}$$

$$s_1 \approx 3,68$$

$$\cosh\left(\frac{s_2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cosh(h) \quad \text{mit (2.5)}$$

$$s_2 \approx 2,47$$

und somit wegen Lemma 3.1.3

$$\gamma_3 > \overline{S_2 S_6} + \overline{S_6 S_4} \geq s_1 + s_2.$$

Damit ist also

$$Q(a, b, c) \geq \frac{\sinh\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)}{\sinh(2h)} > 0,4 > 0,28.$$

□

**Theorem 3.1.6.**  $\Sigma_0$  besitzt eine Zerlegung, die mindestens 2 gute Hosen  $Y_0$  und  $\tilde{Y}_0$  enthält, wobei  $\tilde{Y}_0 = \Phi_0(Y_0)$ .

*Beweis.* Führt man den Beweis von Lemma 3.1.4 für  $\tilde{\gamma}_3 := \Phi_0(\gamma_3)$  noch einmal aus, so sieht man, dass

$$[\tilde{\gamma}_3]_H = [\gamma_1]_H + [\gamma_2]_H = [\gamma_3]_H$$

und dass  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  die Hose  $\tilde{Y}_0 := \Phi_0(Y_0)$  beranden, die disjunkt zu  $Y_0$  ist. Analog zu Theorem 3.1.5 ist  $\tilde{Y}_0$  gut und der Satz ist bewiesen. □

**Bemerkung 3.1.7.** Auch wenn wir hier nur *eine* Hosenzerlegung mit zwei guten Hosen angegeben haben, erhalten wir wegen der Symmetrie von  $F_0$  *sechs* verschiedene Hosenzerlegungen von  $\Sigma_0$  mit jeweils zwei guten Hosen. Hierzu müssen wir lediglich die Lifts von  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  in  $\overline{F_0}$  gleichzeitig um Vielfache von  $\frac{\pi}{6}$  rotieren.

## 3.2 Variation

Wir haben bereits gesehen, dass es eine hyperelliptische Fläche  $\Sigma_0$  gibt, die eine Hosenzerlegung mit mindestens zwei guten Hosen besitzt.

Diese Konstruktion wollen wir nun in einem verallgemeinerten Fundamentalbereich anwenden. Hierzu variieren wir eine Ecke  $Q_i \in \mathbb{H}^2$  des hyperelliptischen Polygons aus Abschnitt 3.1 so, dass wir weiterhin ein hyperelliptisches Polygon erhalten.

Wegen Bemerkung 3.1.7 ist  $Q_i$  ohne Einschränkung  $Q_2$ . Damit gegenüberliegende Seiten identische Längen besitzen, wird zusammen mit  $Q_2$  auch  $Q_8$  variiert. Nun folgt aus Definition 2.3.5 folgendes Lemma:

**Lemma 3.2.1.** *Es sei  $P := (Q_1, \dots, Q_{12})$  das Polygon aus Abschnitt 3.1 und*

$$\tilde{P} := (Q_1, \tilde{Q}_2, Q_3, \dots, Q_7, \tilde{Q}_8, Q_9, \dots, Q_{12})$$

*ein hyperelliptisches Polygon, wobei  $\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_8 \in \mathbb{H}^2$ . Dann sind die Dreiecke  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  und  $(Q_7, \tilde{Q}_8, Q_9)$  zueinander isometrisch und besitzen die gleiche Winkelsumme wie  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ . Diese beträgt*

$$\sigma_0 := \frac{\pi}{6} + 2 \cotan^{-1}(2 + 3\sqrt{3}) \approx 0,799$$

*Beweis.* Zur Vereinfachung bezeichnen wir alle Ecken von  $\tilde{P}$  mit  $\tilde{Q}_i$ , die Seiten zwischen  $\tilde{Q}_{i-1}$  und  $\tilde{Q}_i$  mit  $\tilde{a}_i$  und die Innenwinkel bei  $\tilde{Q}_i$  mit  $\tilde{\alpha}_i$ . Wegen (2.7) und (2.9) gilt dann:

$$\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_8 \quad \tilde{a}_2 = \tilde{a}_8 \quad \tilde{a}_3 = \tilde{a}_9$$

Damit sind die Dreiecke  $(Q_1, \tilde{Q}_2, Q_3)$  und  $(Q_7, \tilde{Q}_8, Q_9)$  isometrisch. Insbesondere ist die Winkelsumme identisch und sei  $\tilde{\sigma}$ . Weiter sei  $\sigma$  die Winkelsumme von  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ . Dann ist nach (2.8)  $\tilde{\sigma} = \sigma$ . Wegen

$$\overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_2 Q_3} = 2h$$

gilt weiter

$$\sigma = \frac{\pi}{6} + 2\varepsilon_0,$$

wobei  $\varepsilon_0$  der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  ist. Für diesen Winkel gilt wegen (2.1)

$$\begin{aligned} \cos(\varepsilon_0) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\varepsilon_0) \cosh(2h) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\varepsilon_0) \\ \cotan(\varepsilon_0) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cosh(2h)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

□

Hiermit können wir also eine Variation von hyperelliptischen Polygonen definieren. Diese Variation besitzt gerade die  $\tilde{Q}_2 \in \mathbb{H}^2$  als Parameter, für die das Dreieck  $(Q_1, \tilde{Q}_2, Q_3)$  die Winkelsumme  $\sigma_0$  besitzt.

Wir werden nun sehen, dass diese Variation durch den Winkel  $\varepsilon$  bei  $Q_3$  im Dreieck  $(Q_1, \tilde{Q}_2, Q_3)$  parametrisiert wird.



**Definition 3.2.2.** Es sei

$$\tilde{P}_\varepsilon = (Q_1, Q_2(\varepsilon), Q_3, \dots, Q_7, Q_8(\varepsilon), Q_9, \dots, Q_{12})$$

das hyperelliptische Polygon, das im Dreieck  $(Q_1, Q_2(\varepsilon), Q_3)$  bei  $Q_3$  den Winkel  $\varepsilon$  besitzt, falls ein solches  $\tilde{P}_\varepsilon$  existiert. Der Winkel bei  $Q_1$  sei dann  $\delta(\varepsilon)$ .

Um zu sehen, dass dieses  $\tilde{P}_\varepsilon$  wohldefiniert ist, falls es existiert, müssen wir nun zeigen, dass  $\delta$  eindeutig durch  $\varepsilon$  bestimmt wird. In diesem Fall wäre  $(Q_1, Q_2(\varepsilon), Q_3)$  durch die Seite  $\overline{Q_1Q_3}$  und die beiden Winkel  $\varepsilon$  und  $\delta(\varepsilon)$  eindeutig definiert. Damit wäre wegen Lemma 3.2.1 auch  $(Q_7, Q_8(\varepsilon), Q_9)$  eindeutig bestimmt und somit  $\tilde{P}_\varepsilon$  wohldefiniert.

**Lemma 3.2.3.** *Wenn  $\tilde{P}_\varepsilon$  existiert, so ist  $0 < \varepsilon, \delta < \sigma_0$  und  $\delta$  durch  $\varepsilon$  eindeutig bestimmt.*

*Weiter ist  $\tilde{P}_{\varepsilon_0} = P_0$  für  $\varepsilon_0 = \cotan^{-1}(2 + 3\sqrt{3})$ .*

*Beweis.* Der entartete Fall  $\varepsilon = 0$  ist nicht möglich, da andernfalls

$$\text{area}(Q_1, Q_2(\varepsilon), Q_3) = 0$$

und die Winkelsumme des Dreiecks somit  $\pi > \sigma_0$  wäre. Da die Winkelsumme  $\sigma_0$  ergeben muss, gilt außerdem  $\varepsilon < \sigma_0$ . Aus (2.1) folgt mit  $B := \overline{Q_1Q_3}$ :

$$\begin{aligned} \cos(\sigma_0 - \varepsilon - \delta) &= \cosh(B) \sin(\varepsilon) \sin(\delta) - \cos(\varepsilon) \cos(\delta) \\ \cos(\delta) [\cos(\sigma_0 - \varepsilon) + \cos(\varepsilon)] &= \sin(\delta) [\cosh(B) \sin(\varepsilon) - \sin(\sigma_0 - \varepsilon)] \\ \cotan(\delta) &= \frac{\cosh(B) \sin(\varepsilon) - \sin(\sigma_0 - \varepsilon)}{\cos(\sigma_0 - \varepsilon) + \cos(\varepsilon)} \end{aligned}$$

Somit ist  $\delta \in (0, \sigma_0) \subset (0, \frac{\pi}{2})$  eindeutig durch  $\varepsilon$  definiert, da  $B$  und  $\sigma_0$  konstant sind.

Die Berechnung von  $\varepsilon_0$  wurde bereits in Lemma 3.2.1 geführt.  $\square$

**Lemma 3.2.4.**  *$\tilde{P}_\varepsilon$  existiert genau für  $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$  mit:*

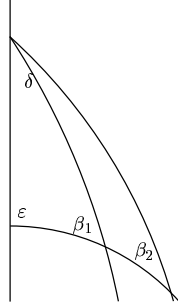
$$\varepsilon_{\min} \approx 0,0251$$

$$\varepsilon_{\max} \approx 0,774$$

*Beweis.* Ein Dreieck  $[\delta, B, \varepsilon, D, \beta, E]$  ist durch  $B$ ,  $\varepsilon$  und  $\delta$  bis auf Isometrie eindeutig gegeben. Da  $B$  und  $\varepsilon$  fest sind, ist die Winkelsumme

$$\sigma := \delta + \varepsilon + \beta$$

in  $\delta$  monoton fallend. Weiter ist auch  $\beta$  in  $\delta$  monoton fallend (Abbildung 3.5). Das Minimum von  $\sigma$  erhält man also für  $\beta = 0$ .  $\delta$  nehme dann den

Abbildung 3.5: Der Winkel  $\beta$  fällt bei wachsendem  $\delta$  und festem  $\varepsilon$ .

Wert  $\delta_{\varepsilon,B}$  an. Da  $\sigma$  demnach alle Werte zwischen  $\varepsilon + \delta_{\varepsilon,B}$  und  $\pi$  annimmt, existiert  $\tilde{P}_\varepsilon$  genau dann, wenn  $\delta_{\varepsilon,B} < \sigma - \varepsilon$ . Das führt uns zu

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(0) = \cosh(B) \sin(\varepsilon) \sin(\delta_{\varepsilon,B}) - \cos(\varepsilon) \cos(\delta_{\varepsilon,B}) \\ &< \cosh(B) \sin(\varepsilon) \sin(\sigma - \varepsilon) - \cos(\varepsilon) \cos(\sigma - \varepsilon). \end{aligned}$$

Mit  $x := \sin(\varepsilon)$  ist also die Existenz von  $\tilde{P}_\varepsilon$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1 &< \cosh(B)x \left( \sin(\sigma_0) \sqrt{1-x^2} - \cos(\sigma_0)x \right) - \\ &\quad \sqrt{1-x^2} \left( \cos(\sigma_0) \sqrt{1-x^2} + \sin(\sigma_0)x \right) \end{aligned}$$

Aus

$$x^2 \cos(\sigma_0) (\cosh(B) - 1) + \cos(\sigma_0) - 1 < x \sqrt{1-x^2} \sin \sigma_0 (\cosh(B) - 1)$$

erhalten wir dann mit  $\kappa := \frac{\cos(\sigma_0)+1}{\cosh(B)-1} \approx 0,0175$

$$\begin{aligned} x^2 \cos(\sigma_0) + \kappa &< x \sqrt{1-x^2} \sin(\sigma_0) \\ x^4 - (\sin(\sigma_0)^2 - 2 \cos(\sigma_0) \kappa) x^2 + \kappa^2 &< 0 \end{aligned}$$

Also existiert  $\tilde{P}_\varepsilon$  genau für  $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$  mit:

$$\begin{aligned} \sin(\varepsilon_{\min}) &= \sqrt{\frac{\sin(\sigma_0)}{2} - \cos(\sigma_0) \kappa} - \sqrt{\left(\frac{\sin(\sigma_0)}{2} - \cos(\sigma_0) \kappa\right)^2 - \kappa^2} \\ &\approx 0,0251 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\varepsilon_{\max}) &= \sqrt{\frac{\sin(\sigma_0)}{2} - \cos(\sigma_0) \kappa} + \sqrt{\left(\frac{\sin(\sigma_0)}{2} - \cos(\sigma_0) \kappa\right)^2 - \kappa^2} \\ &\approx 0,699 \end{aligned}$$

Da außerdem  $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ , ist hierdurch  $\varepsilon_{\min}$  und  $\varepsilon_{\max}$  eindeutig definiert.  $\square$

Da wir nun wissen, dass  $\tilde{P}_\varepsilon$  wohldefiniert ist und genau für  $\varepsilon \in (\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max})$  existiert, können wir nun die Variation hyperelliptischer Flächen angeben.

**Definition 3.2.5.** Es sei

$$t_{\min} := \varepsilon_{\min} - \varepsilon_0 \qquad t_{\max} := \varepsilon_{\max} - \varepsilon_0$$

mit  $\varepsilon_{\min}$  und  $\varepsilon_{\max}$  aus Lemma 3.2.4. Es sei

$$P_t := \tilde{P}_{\varepsilon_0+t} \qquad \text{für } t \in (t_{\min}; t_{\max}).$$

Weiter seien  $F_t$  die Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{H}^2 \setminus P_t$ , die  $Z$  enthält und  $\Sigma_t$  die hyperelliptische Fläche aus Lemma 2.3.2, die  $F_t$  als Fundamentalbereich besitzt. Darüber hinaus sei  $\Phi_t$  die isometrische Involution, die durch die  $\pi$ -Rotation in  $F_t$  auf  $\Sigma_t$  induziert wird.

Analog zur Definition 3.1.2, definieren wir in  $\Sigma_t$  die Geodätischen  $\gamma_1^t$ ,  $\gamma_2^t$  und  $\gamma_3^t$ . Führt man nun die Beweise von Lemma 3.1.4 und Theorem 3.1.6 erneut durch, so erhält man eine Hose  $Y_t$ , die zur Hose  $\tilde{Y}_t := \Phi_t(Y_t)$  disjunkt ist. Diese Hosen haben  $\gamma_1^t$  und  $\gamma_2^t$  als gemeinsame Randgeodätische. Die dritte Randgeodätische von  $Y_t$  ist  $\gamma_3^t$  und die dritte Randgeodätische von  $\tilde{Y}_t$  ist  $\tilde{\gamma}_3^t := \Phi_t(\gamma_3^t)$ .

Nun bleibt noch zu zeigen, dass in jedem  $\Sigma_t$ , das existiert, durch  $Y_t$  eine gute Hose definiert ist. Damit hätten wir auch in  $\Sigma_t$  eine Hosenzerlegung gefunden, die mindestens zwei gute Hosen besitzt.

In Abschnitt 3.1 hatten wir mit  $0,4 < Q(Y_0) < 1,32$  zwar eine ausreichende Abschätzung für den Quotienten  $Q(Y_0)$  gefunden. Allerdings können wir nicht erwarten eine ebenso gute Abschätzung für alle  $Y_t$  zu erhalten. Daher werden wir auf eine andere Art beweisen, dass  $Y_t$  für  $t \in (t_{\min}, t_{\max})$  gut ist.

**Theorem 3.2.6.** *Es sei  $t \in (t_{\min}, t_{\max})$ . Dann gilt:*

1.  $\frac{\gamma_1^t}{2} = \frac{\gamma_2^t}{2} = h \approx 1,99$
2.  $Y_t$  ist gut.

*Beweis.* 1. gilt offensichtlich, da sich die Lage dieser beiden Geodätischen im Vergleich zur Grundkonstruktion nicht geändert hat. Kommen wir also zu 2.

**Fall 1:**  $\gamma_3^t \leq \gamma_1^t = \gamma_2^t$

Dann gilt für jede Geodätische  $\gamma$ :

$$\cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \cosh\left(\frac{h}{2}\right) < 9$$

und  $Y_t$  ist nach Korollar 2.2.13 gut.

**Fall 2:**  $\gamma_3^t \geq \gamma_1^t = \gamma_2^t$  und  $Q(Y) \in [0,28; 3,7]$   
Dann ist  $Y_t$  nach Korollar 2.2.13 gut.

**Fall 3:**  $\gamma_3^t \geq \gamma_1^t = \gamma_2^t$  und  $Q(Y) < 0,28$   
Dann ist

$$\sinh\left(\frac{\gamma_3^t}{2}\right) < 0,28 \sinh(2h) \approx 7,51.$$

Es gilt dann für jede Randgeodätische  $\gamma$ :

$$\cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \cosh\left(\frac{\gamma_3^t}{2}\right) < 9$$

und  $Y_t$  ist nach Korollar 2.2.13 gut.

**Fall 4:**  $\gamma_3^t \geq \gamma_1^t = \gamma_2^t$  und  $Q(Y) > 3,7$

Nehmen wir nun an, dass  $Y_t$  schlecht sei. Dann folgt aus Theorem 2.2.11, dass  $Y_t$  vom Typ (S) ist. Weiter sei  $c$  die Kürzeste zwischen  $\gamma_1^t$  und  $\gamma_2^t$ . Theorem 2.2.11 liefert dann den Widerspruch:

$$9 < \cosh(c) < \cosh(p_0(\overline{Q_1 W_1})) = \cosh(h) < 2 + \sqrt{3}$$

□

Wir haben nun gesehen, wie die Schmutz'schen Hosen-Kriterien das Suchen nach guten Hosen erleichtern.

Insbesondere wurde gezeigt, dass ausgehend von der Grundkonstruktion  $F_0$  jede Variation von gegenüberliegenden Ecken den Fundamentalbereich einer Fläche beschreibt, die eine Hosenzerlegung mit zwei guten Hosen besitzt.  $\Sigma_t$  beschreibt somit einen Weg im Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_3$ . Nun folgt aus dem Beweis von Lemma 3.2.4 aber gerade

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} \alpha_2(\Sigma_t) = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow t_{\max}} \alpha_2(\Sigma_t) = 0$$

Mit  $B := \overline{Q_1 Q_3}$  ist nun

$$\alpha_2(\Sigma_t) = \sinh(B) \frac{\sin(t)}{\sin(\alpha_2(\Sigma_t))}$$

und es handelt sich somit bei  $\Sigma_t$  um einen eigentlichen Weg im Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_3$ .

# Literaturverzeichnis

- [Bus92] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [Cha84] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [Gre67] Marvin J. Greenberg. *Lectures on algebraic topology*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [Sch90] Paul Schmutz. Small eigenvalues on Y-pieces and on Riemann surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 65(4):603–614, 1990.
- [Sch96] Paul Schmutz. New results concerning the number of small eigenvalues on Riemann surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 471:201–220, 1996.
- [SS99] Paul Schmutz Schaller. Teichmüller space and fundamental domains of Fuchsian groups. *Enseign. Math. (2)*, 45(1-2):169–187, 1999.